不安定な周期構造のフェイズ・ダイナミックス

京大基研　蔵本由紀

最近のカオスや乱流の理論では、小数自由度力学系の模型がしばしば用いられ、少くともカオスのonsetに関しては、そのような模型で充分であることが前提されている場合が多い。これは多くの場合に正しいが、全く正しくない場合もある。どのような場合か、と云うと、はじめて現われる非周期運動が非常に弱いカオス（最大リヤプノフ数が0に近いという意味で）であっても、なお且つアトラクターの次元が非常に高いという場合なのであるが、具体的には、空間的な広がりが大きい系で、実質的に波長無限大のモード（通常は位相モード）から不安定化が生じる場合がその典型である。もう少し正確に言えば、系の大きさ（ある方向への）を無限に大きくしてゆくと、小数自由度力学模型が妥当するようなパラメタ領域が0に縮まってゆくのである。このような場合に生じた弱い乱流を位相乱流と称する[1]。この種の乱流はRayleigh-Bénard対流、特にaspect ratioが充分に大で、Prandtl数が比較的小さい場合に生じうることが期待されている[2][3]。その場合、規則的なロール構造はEckhaus instability [4], Zig-zag instability, scewed-varicose instability [5]等を通して乱れるが、これらはすべて無限大の位相ゆらぎが不安定化しはじめるphase instabilityなのである。実際には、その結果必ず乱流が出現するとは言えないのであるが、ともかく、このようなシチュエーションにおいては、適当に定義した位相関数$\phi(\underline{r},t)$のゆるやかな変動で以て系のダイナミックスを記述するのが自然であると期待される。こうしたアイディアは既にchemical oscillation [1][6][7]やchemical wavefront [8], combustion front [9]の運動と乱流化との関連で採用されている。流体は複雑なので、現在の処線型領域に限ってphase dynamicsの議論がある[10][11][12]。以下の理論では、二次元系の周期構造が位相不安定を起した場合に、不安定点の近傍で、一般にϕに対するどのような発展方程式が得られるかを考察する。ベースとなる周期構造としては、一つの座標だけに依存する簡単な場合のみを考える。真の二次元周期構造の場合には2つ又はそれ以上の位相変数が必要となろう。

位相方程式の導出

出発点のモデルダイナミックスとして、偏微分方程式

$$\partial_t \vec{X} = \vec{F}(\vec{X};\partial_x,\partial_y) \tag{1}$$

を考える。ここに$\vec{X}$は実ベクトル、$\vec{F}$は$\vec{X}$のnonlinear functionで$\vec{X}$のいろいろな空間微分を含んでよい。また上式は、座標の並進、反転、回転に関して不変であるとする。多くの物理系がこの条件をみたしているが、ひとつの典型例は反応拡散方程式である。

(1)が周期解のfamily

$$\vec{X}_0(\psi+l)=\vec{X}_0(l) \qquad \psi = x-ct+\phi,\quad l=2\pi/k \tag{2}$$

をもつとする。ϕは任意定数、l又はkは連続パラメタでパターンの波長又は波数を表

わす。$\bar{X}_0$の形は一般にkに依存する。$c \neq 0$ならば、パターンは速度cでx方向に伝播していて、この場合cはkに依存する。一方、熱対流のロール構造のように、有限の波数領域に亘って$c=0$となる場合も重要である。伝播する周期構造をタイプA、静止した周期構造をタイプBとしよう。タイプBに対しては、xのプラス方向とマイナス方向とは等価と期待されるから、パターンは左右対称、すなわち

$$\bar{X}_0(-\psi+\psi_0)=\bar{X}_0(\psi) \tag{3}$$

をみたすψ_0が存在するであろう。いまはこれを仮定する。一方、タイプAのパターンは左右非対称である。Belousov-Zhabotinsky反応系のchemical waveなどはこれにあたる。

次にphase dynamicsの背景となるアイディアを説明しよう。いま、周期パターン$\bar{X}_0(\psi)$をdeformさせて、位相ϕに緩やかなx, y依存性を許したとしよう。このような$\bar{X}_0(\psi)$は勿論(1)の正確な解ではない。しかし、ϕに適当な時間発展をも許してやれば、(1)の良い近似解となりうるであろう。言い換えれば、パターンの緩やかなdeformationにおいては、等位相線に垂直な方向に沿って見たパターンのprofileは、最低近似としては無視できるのである。ϕの時間発展は遅いはずである。何となれば、ϕは、パターンの並進という中立安定のdisturbanceを長波長領域へと拡張したdisturbance variableだからである。一般に、長波長の極限で時間発展の速度が0になるような場の変数をslow fieldと呼ぶことにする。もし、保存量があればこれはslow fieldになる。以下の理論では、系のslow fieldはϕ以外に無いと仮定する。その結果、ϕ以外のすべての自由度は急速にrelaxし、ϕ(xはψ)のゆっくりした運動に断熱的に追従すると期待される。言換えれば、系の時々刻々の状態は、各時刻におけるϕ(xはψ)の全系に亘る分布によって実質的に決っていると考えられる。更に、(1)は時間に関して1階だから、上述のことは、ϕの分布(ψの分布)によって$\dot{\phi}$($\dot{\psi}$)も決るということを示している。即ち、

$$\partial_t \phi = \Omega[\phi] \tag{4a}$$

$$\partial_t \psi = f[\psi] \tag{4b}$$

と書ける。ここで、[ ]はϕ(ψ)及びそのあらゆる空間微分への依存性をあらわす。つまり

$$\Omega[\phi]=\Omega(\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_x^2\phi, \partial_x\partial_y\phi, \partial_y^2\phi, \cdots) \tag{5a}$$

$$f[\psi]=f(\psi, \partial_x\psi, \partial_y\psi, \partial_x^2\psi, \partial_x\partial_y\psi, \partial_y^2\psi, \cdots) \tag{5b}$$

である。更に、上式の右辺は多重Taylor展開可能と仮定しよう。以上のいくつかの仮定を厳密に正当化することは不可能に近いが、少くとも反応拡散系に対してはΩ, fを上述の微分展開の形で任意の次数まで求められるということを示し得る[13]。以下の問題は、このような無限級数をどのようにして有限級数に縮約するかということである。これには対称性の考察とスケーリングの観点が大いに有効である。

先ず対称性の考察であるが、(1)に対して仮定した空間対称性は、ψに対する方程式でも保たれていると期待される(但し、ϕに対する方程式では成立たない。何となれば、ϕは既に空間対称性を破って出現したパターンからのずれを表わす変数だからである)。この仮定の下に、並進$x \to x+x_0$はfを不変に保つことが要求される。一方、並進は、

ψの空間微分には影響を与えず、単にψを$\psi+x_0$とするだけである。従って、この不変性から出てくる性質は、fがψ値そのものに依らないこと、言換えれば、

[I] Ωはψ値によらない

ということである。なお、並進$y \to y+y_0$に関しては、f及びΩの不変性は自動的に成立している。次に反転$y \to -y$に関してfは不変でなければならないことから、

[II] $y \to -y$に関してΩは不変である。

反転$x \to -x$、及び回転に関してもfは不変でなければならないが、これらはΩの性質としては簡単に表現できない。尤もΩの展開係数間の一定の関係を要求するだろうが。最後に、タイプBに限っては、性質(3)を用いることができる。(3)の内容は、ψという状態と$-\psi$という状態とが、並進を別とすれば物理的に同一の状態に対応しているということである。これは、ψが空間変化をもっていても言えることである。したがって、fは変換$\psi \to -\psi$に関しても不変でなければならない。つまり、

[III] 二重の変換 $\psi \to -\psi$及び$x \to -x$に関してΩは不変である（但し、Bタイプに対してのみ）。

Ωの展開項の中で、以上の不変性条件をみたさないものは自動的に消えなければならない。これによって、Ωの展開形はかなり簡単になるが、なお無限級数である。

次に、スケーリング・アイディアによって更にΩを簡単にすることを考えよう。スケーリング・アイディアが適用できる為には、系が小さなパラメタを含む必要がある。今の場合、これはψの時間的・空間的変化のslownessに関係している。このslownessが自発的に出現する場合として、phase instability pointの近傍を考えることができる。ここでは、次の2種類のphase instabilityを考えよう。

(E) Eckhaus instability

(Z) zig-zag instability

これらのinstabilityはタイプA、タイプBのいずれの周期解にも起りうるから、結局$2 \times 2 = 4$通りのケースが考えられる。これらをA-E, A-Z, B-E, B-Zとする。さて(E)及び(Z)型のinstabilityの内容を説明しよう。周期解$\vec{X}_0(x-ct)$からのsmall deviationを考える為に、

$$\vec{X}(x,y,t) = \vec{X}_0(x-ct) + \vec{\rho}(x-ct,y,t) \tag{6}$$

とおく。(1)式を$\vec{\rho}$に関して線型化し、その解を

$$\vec{\rho}(x-ct,y,t) = \vec{u}(x-ct)\exp\{i(q_x x + q_y y) + \lambda t\}$$

とおく。ここに、$\vec{u}$は$x-ct$に関して周期λの関数であり、その関数形は$\vec{q} \equiv (q_x, q_y)$に依存してよい。$\vec{q}=0$に対しては、固有値$\lambda$のひとつが0になる。これは位相モード又は並進モードに対応している。このλを有限の$\vec{q}$に拡張したものを位相分枝と呼ぶことにする。位相不安定性以外の不安定性はここでは考えていないから、位相分枝以外の分枝に対しては、λの実部は負の有限値と仮定する。さて、λを$\vec{q}$で展開しよう。この展開は、ψに関して線型したΩのTaylor展開に厳密に対応しているはずで、$\lambda \leftrightarrow \partial_t$, $iq_x \leftrightarrow \partial_x$, $iq_y \leftrightarrow \partial_y$なる対応関係によって両者は一致しなければならない。このこと

と前述の不変性条件から言えることとして、まずλはiq_yの奇べきを含まない（[II]による）。更に、タイプBに対しては、λはiq_xの奇べきも含まない（[III]による）。結局、一般に

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda &= i\lambda_i - \lambda_r \\
\lambda_i &= (a_1 q_x + a_3 q_x^3 + \cdots\cdots) + (c_{12} q_x q_y^2 + c_{32} q_x^3 q_y^2 + \cdots) \\
\lambda_r &= (a_2 q_x^2 + a_4 q_x^4 + \cdots) + (b_2 q_y^2 + b_4 q_y^4 + \cdots) + (c_{22} q_x^2 q_y^2 + \cdots)
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

と書かれる。ここに、a_i, b_i, c_{ij}は定数で、一般にkに依存する。また、タイプBに対しては、$\lambda_i = 0$である。a_2又はb_2が正から負に変ると、長波長モードから不安定成長が起るが、前者がEckhaus instability、後者がzig-zag instabilityである。これらはそれぞれ、longitudinal instability, transversal instabilityとも言ってよい。以下の議論では、$a_4, b_4 > 0$とする、つまり、これらの項は安定性に寄与すると仮定する。

さて、instability pointの近傍を考え、$a_2 = -\varepsilon$又は$b_2 = -\varepsilon$とおく。εは微小パラメタである。いずれのinstabilityの場合でも、方程式$\dot\phi = \Omega[\phi]$の解は充分に小さいεに対してスケーリング形

$$
\phi(x, y, t) = \varepsilon^{\beta} \tilde\phi(\varepsilon^{\nu} x,\ \varepsilon^{\nu'} y,\ \varepsilon^{\delta} t) \qquad (8)
$$

をもつと期待される。ここにβ, ν, ν', δは未定の指数である。これらは非負と仮定しよう。指数を用いて、Ωのいろいろな展開項の大きさをεのべきで表わすことができる。例えば、$\partial_x \phi \sim \varepsilon^{\nu+\beta}$, $(\partial_y \phi)^2 \sim \varepsilon^{2(\nu'+\beta)}$等である。従って、指数の値さえ判れば、$\Omega$の展開の中で最も支配的な項を選り出して簡約化されたダイナミックスを得ることができる。指数を決るには次のようにする。先ず、δは他の3つの指数が決まれば自動的に値がわかることは明らかであろう。更に、(E)型instabilityにおいては、不安定化の項$-\varepsilon\partial_x^2\phi$と安定化項$\partial_x^4\phi$がバランスし、更にこれらは、lateral diffusion $\partial_y^2\phi$ともバランスすることが期待される。(Z)型では、同様にして、$-\varepsilon\partial_y^2\phi \sim \partial_y^4\phi \sim \partial_x^2\phi$なるバランスが成立つであろう。これから$\nu$, ν'が決まる。やってみれば容易に判るが、ν, ν'が決まれば、$\beta(\geq 0)$の値の如何にかかわりなく、どの非線型項がmost dominantかが一義的に決るのである。この非線型項と上の線型項とのバランスから最終的にβが決定される。4つのケースについて、各指数の値を示すと次のようになる。

表 1.

	β	ν	ν'	δ
A-E	1/2	1/2	1	3/2
A-Z	1	1	1/2	2
B-E	1/2	1/2	1	2
B-Z	0	1	1/2	2

支配的な項以外を無視して得られた方程式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&(\text{A-E}) \qquad \partial_t \phi = L\phi + g(\partial_x \phi)^2 \\
&\qquad L = a_1\partial_x + a_2\partial_x^2 - a_3\partial_x^3 - a_4\partial_x^4 + b_2\partial_y^2, \quad a_2 = -\varepsilon
\end{aligned} \qquad (9)
$$

(A-Z) $$\partial_t\phi = L\phi + g(\partial_y\phi)^2,$$
$$L = b_2\partial_y^2 - c_{12}\partial_x\partial_y^2 - b_4\partial_y^4 + a_2\partial_x^2, \quad b_2 = -\varepsilon \qquad (10)$$

(B-E) $$\partial_t\phi = L\phi + g\,\partial_x\phi\cdot\partial_x^2\phi,$$
$$L = a_2\partial_x^2 - a_4\partial_x^4 + b_2\partial_y^2, \quad a_2 = -\varepsilon \qquad (11)$$

(B-Z) $$\partial_t\phi = L\phi + \{g_1\partial_x\phi + g_2(\partial_y\phi)^2\}\partial_y^2\phi,$$
$$L = b_2\partial_y^2 - b_4\partial_y^4 + a_2\partial_x^2, \quad b_2 = -\varepsilon \qquad (12)$$

ここに、a_i, b_i, c_{ij} は分散式(7)に現われる a_i, b_i, c_{ij} とそれぞれ一致しなければならない。 非線型パラメタはいずれも g と書いたが、勿論各場合で異なっている。 式(9)については若干の説明を要する。 まず、変換 $x\to x-a_1t$ によって $a_1\partial_x\phi$ 項は消去できる 表1の指数の値はこの新しい表式に対するものである。 すると、直ろに判るように、$\partial_x^3\phi$, $(\partial_x^2\phi)$ は $O(\varepsilon^2)$ であるのに、$a_2\partial_x^2\phi$, $\partial_x^4\phi$, $\partial_y^2\phi$ の残り3項は $O(\varepsilon^{5/2})$ のように高次になる。しかし後者は散逸項としては最低次なのでこれを無視することはできない。 そもそも instability が散逸項によって起るのだし、スケーリング形(8)自体がこれらの項の存在によって成立するのだから。

非線型パラメタ g は各場合について次のように決定される。

(A-E) (9)の特解として、$\phi = kx + (a_1k + gk^2)t$ を考える。 slowness の仮定により、kは微小量である。 この解に対応するパターンは
$$\vec{X}_0(\phi) = \vec{X}_0\left((1+k)x - (c(k) - a_1k - gk^2)t\right)$$
となって、やはり完全な周期パターンであるが、波長が k から $\tilde{k} \equiv k(1+k)$ に変化している。伝播速度も c から $\tilde{c} \equiv c(k) - a_1k - gk^2$ に変っている。 $\tilde{c}$ は $c(\tilde{k})$ に一致しなければならない、という条件から、$c(\tilde{k})$ を $c(k)$ のまわりに展開して
$$g = -k^2\, d^2c(k)/dk^2$$
を得る。

(A-Z) (10)の特解として $\phi = kx + gk^2t$ を考え、上と同様の考察から
$$g = \frac{k}{2}\, dc(k)/dk$$
を得る。

(B-E) $\phi = kx + \phi_0\exp(iq_xx + \lambda t)$ とおく。ϕ_0について(11)を線型化すると、
$$\lambda = -\tilde{a}_2q_x^2 - a_4q_x^4$$
となる。 ここに、$\tilde{a}_2 = a_2(k) + gk^2$ である。この解は、波数 $\tilde{k} \equiv k(1-k)$ をもつ周期パターンに生じた、振幅 ϕ_0 の位相の乱れを記述している。 当然、$\tilde{a}_2 = a_2(\tilde{k})$ でなければならないから、
$$g = k\, da_2(k)/dk$$
となる。

(B-Z) $\phi = k_1x + k_2y + \phi_0\exp(iq_yy + \lambda t)$ とおいて (B-E)の場合と同様の考察をすること

により

$$g_1 = 2g_2 = k\,db_2(k)/dk$$

が得られる.

得られた4つの非線型位相方程式(9)~(12)の詳しい性質についてはここでは論じない. このうちのいくつかは乱流的ふるまいをすることが期待される.

参考文献

[1] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64 (1978), 346.

[2] G. Ahlers and R.P. Behringer, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64 (1978), 186.

[3] P. Gollub and J.F. Steinman, Phys. Rev. Lett. 47 (1981), 505.

[4] W. Eckhaus, "Studies in Nonlinear Stability Theory", Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 6 (Springer, Berlin, 1965).

[5] R.M. Clever and F.H. Busse, J. Fluid Mech. 65 (1974), 625.

[6] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. 55 (1976), 356.

[7] T. Yamada and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 56 (1976), 681.

[8] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. 63 (1980), 1885;
Y. Kuramoto, in "Dynamics of Synergetic Systems" (ed. H. Haken, Springer, Heidelberg 1980), 134.

[9] G.I. Sivashinsky, Acta Astronautica 4 (1977), 1177;
G.I. Sivashinsky, ibid. 6 (1979), 569.

[10] Y. Pomeau and P. Manneville, J. Phys. (Paris) Lett. 40 (1979), 609.

[11] E. Siggia and A. Zippelius, Phys. Rev. Lett. 47 (1981), 835.

[12] M.C. Cross, Phys. Rev. A27 (1983), 490.

[13] Y. Kuramoto, Submitted to Prog. Theor. Phys.